Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Campionati di Fisica 2024

38ª edizione

Soluzione

Gara nazionale teorica

venerdì 12 aprile 2024

PROBLEMA n. 1 – Puro rotolamento

Quesito n. 1.

Detta σ la massa per unità di superficie del materiale, la massa del disco intero (prima di praticare il foro) è $M_0 = \pi R^2\,\sigma$ mentre la massa della parte rimossa è $m = \pi(R/2)^2\,\sigma = M_0/4$. La massa dell'oggetto è quindi $M = 3M_0/4 = 3m$.

Si può rispondere in almeno due modi, tenendo conto che il CdM di un disco intero omogeneo coincide ovviamente con il suo centro.

Nel primo modo si considera che il disco pieno di massa M_0 è composto dall'oggetto di massa M e da un secondo disco più piccolo di massa m e raggio $R/2$.

Con riferimento alla figura a sinistra del testo, il CdM dell'oggetto si trova in $x_1 = x_{\mathsf{CdM}}$ e quello del disco di massa m in $x_2 = R/2$. Poiché il CdM del disco pieno si trova nell'origine si ha

$$0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{M\,x_{\mathsf{CdM}} + m\,R/2}{M + m} \quad \text{da cui, poiché } M = 3m, \text{ si ha} \quad x_{\mathsf{CdM}} = -\frac{1}{6}\,R\,.$$

Nel secondo modo si parte da un disco con due fori uguali, disposti simmetricamente rispetto al centro, che ha CdM nel centro ($x_1 = 0$), e si aggiunge un dischetto che riempie il foro centrato in $x_2 = -R/2$. Le masse adesso sono $m_1 = M_0/2 = 2m$ e $m_2 = m$ per cui

$$x_{\mathsf{CdM}} = \frac{-m\,R/2}{3m} = -\frac{1}{6}\,R\,.$$

Dunque $d = R/6$.

Quesito n. 2.

Le possibili posizioni di equilibrio, per ogni scelta di θ, sono due: $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Per $\theta = 0$ l'equilibrio è stabile perché la posizione del CdM è la più bassa possibile e quindi l'energia potenziale è minima, mentre per $\theta = \pi$ l'equilibrio è instabile perché la posizione del CdM è la più alta possibile e l'energia potenziale è massima.

Quesito n. 3.

Anche per il calcolo del momento d'inerzia si può pensare a un disco completo come composto dall'oggetto in esame e da un disco più piccolo.

Per ciascuno dei due dischi si usa il teorema di Steiner per cui il momento di inerzia rispetto a un asse α parallelo a quello passante per il CdM è dato da $I_\alpha = I_{\mathrm{G}} + m\ell^2$ dove I_{G} è il momento d'inerzia rispetto all'asse per il CdM e ℓ la distanza tra i due assi.

Il momento d'inerzia del disco pieno è quindi

$$I_0 = \frac{1}{2}\,M_0\,R^2 + M_0\,R^2 = \frac{3}{2}\,M_0 R^2 = 2MR^2 \quad \text{ricordando che} \quad M_0 = \frac{4}{3}\,M$$

mentre quello del disco piccolo è

$$I_1 = \frac{1}{2}\,m\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m\left(\frac{3R}{2}\right)^2 = \frac{19}{8}\,mR^2 = \frac{19}{24}\,MR^2$$

per cui, detto I il momento d'inerzia cercato si ha

$$I_0 = I + I_1 \quad \Rightarrow \quad I = I_0 - I_1 = \frac{29}{24}MR^2\,.$$

Quesito n. 4.

L'energia cinetica per rotazioni attorno al punto di contatto P è data da

$$K = \frac{1}{2}\,I\omega^2$$

mentre l'energia potenziale è

$$U(\theta) = Mgd(1-\cos\theta) \approx \frac{1}{2}\,Mgd\,\theta^2 \quad \text{in virtù dell'approssimazione [A4] essendo } \theta \ll 1\,.$$

Quindi si può scrivere

$$E = \frac{1}{2}\,\mu\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,k\,\theta^2 \quad \text{con} \quad \mu = I = \frac{29}{24}MR^2 \quad \text{e} \quad k = Mgd = \frac{1}{6}\,MgR\,.$$

Quesito n. 5.

Il moto è equivalente a quello di una massa μ fissata a una molla di costante elastica k e quindi è armonico con pulsazione

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{4}{29}\,\frac{g}{R}}\,.$$

La legge oraria per la coordinata θ, tenuto conto delle condizioni iniziali, è quindi

$$\theta(t) = \theta_0\cos\Omega t\,. \qquad \text{Il periodo del moto armonico è} \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = \pi\sqrt{\frac{29\,R}{g}}\,.$$

Quesito n. 6.

Nel riferimento solidale con il punto C, l'asse di rotazione passa per C e quindi

$$\vec{L} = I_{\mathsf{C}}\,\vec{\omega}$$

dove I_{C} è il momento di inerzia rispetto al centro C e non dipende dal tempo.

Per la condizione di puro rotolamento $\omega = v_{\mathsf{C}}/R$ è costante, per cui anche il momento angolare è costante.

Quesito n. 7.

Nel riferimento scelto, posta l'origine nel punto C, la posizione, la velocità e l'accelerazione del CdM in funzione del tempo sono date da

$$\begin{cases} x = -d\,\operatorname{sen}\omega\,t \\ y = -d\,\cos\omega\,t \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = -\omega\,d\,\cos\omega\,t \\ v_y = \omega\,d\,\operatorname{sen}\omega\,t \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = \omega^2\,d\,\operatorname{sen}\omega\,t \\ a_y = \omega^2\,d\,\cos\omega\,t \end{cases} \quad \text{con} \quad \omega^2 d = \frac{v^2}{R^2}\,\frac{R}{6} = \frac{v^2}{6R}\,.$$

Nota: nel seguito, per semplificare le notazioni, si pone sempre $\omega t = \theta$, sottintendendo che θ è funzione del tempo.

L'accelerazione del CdM è determinata dalle forze esterne; per la prima equazione cardinale dei sistemi (secondo principio della dinamica)

$$M\,\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{A} = M\,\vec{a}$$

equazione che, scomposta sugli assi x e y, dà

$$\begin{cases} F + A = M\,a_x = M\omega^2\,d\,\operatorname{sen}\theta \\ N - Mg = M\,a_y = M\omega^2\,d\,\cos\theta\,. \end{cases}$$

Poiché il momento angolare è costante, il momento risultante $\vec{\mathcal{M}}$ rispetto al punto C è nullo. Avendo la forza $\vec{F}$ momento nullo rispetto a C si ha (seconda equazione cardinale dei sistemi, componente z)

$$\mathcal{M} = AR + Mgd\,\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{Mgd\,\operatorname{sen}\theta}{R} = -\frac{1}{6}\,Mg\,\operatorname{sen}\theta \quad \text{da cui} \quad \vec{A} = -\frac{1}{6}\,Mg\,\operatorname{sen}\theta\;\hat{\imath}\,.$$

Si trova quindi

$$F = M\left(\omega^2\,d + \frac{1}{6}\,g\right)\operatorname{sen}\theta = M\left(\frac{v^2}{6R} + \frac{1}{6}\,g\right)\operatorname{sen}\theta = \frac{M}{6R}\,(v^2 + g\,R)\,\operatorname{sen}\theta \quad \text{da cui} \quad \vec{F} = \frac{M}{6R}\,(v^2 + g\,R)\,\operatorname{sen}\theta\;\hat{\imath}\,.$$

Si osserva che, per mantenere costante la velocità, la forza applicata è diretta nel verso positivo per metà periodo mentre il CdM sale, e in verso contrario nell'altra metà quando il CdM scende; analogamente cambia verso la forza d'attrito, in controfase rispetto a $\vec{F}$.

La reazione normale vale

$$N = M(g + \omega^2\,d\,\cos\theta) = \frac{M}{6R}\,(6gR + v^2\cos\theta) \quad \text{per} \quad 6gR + v^2\cos\theta > 0$$

altrimenti è nulla. In termini vettoriali $\vec{N} = \dfrac{M}{6R}\,(6gR + v^2\cos\theta)\;\hat{\jmath}\,.$

Quesito n. 8.

Affinché non si abbia distacco deve essere sempre $N > 0$, quindi, poiché $\cos\theta$ varia tra -1 e 1,

$$\forall\theta : 6gR > -v^2\cos\theta \quad\Rightarrow\quad 6gR > v^2 \quad\Rightarrow\quad v < \sqrt{6gR} = v^\star\,.$$

Quesito n. 9.

La condizione di puro rotolamento richiede che la forza d'attrito necessaria sia sempre minore di quella che il coefficiente d'attrito statico può fornire

$$|A| \le \mu_\mathrm{s}\,N \quad\Rightarrow\quad \mu_\mathrm{s} \ge \frac{|A|}{N} = \frac{(Mg/6)\ |\mathrm{sen}\,\theta|}{(M/6R)\,(6gR + v^2\cos\theta)} = gR\,\frac{|\mathrm{sen}\,\theta|}{v^{\star 2} + v^2\cos\theta} = \frac{v^{\star 2}}{6}\,f(\theta) \quad \text{con}$$

$$f(\theta) = \frac{|\mathrm{sen}\,\theta|}{v^{\star 2} + v^2\cos\theta}\,.$$

Per determinare il valore minimo di μ_s occorre trovare il massimo di $f(\theta)$ al variare di θ; questo corrisponde a trovare i massimi e i minimi della funzione

$$f_1(\theta) = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{v^{\star 2} + v^2\cos\theta} \quad \text{per cui deve essere} \quad f_1'(\theta) = 0\,.$$

$$f_1'(\theta) = \frac{\cos\theta\,(v^{\star 2} + v^2\cos\theta) - \mathrm{sen}\,\theta\,(-v^2\,\mathrm{sen}\,\theta)}{(v^{\star 2} + v^2\cos\theta)^2} = \frac{v^{\star 2}\,\cos\theta + v^2}{(v^{\star 2} + v^2\cos\theta)^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = -\left(\frac{v}{v^\star}\right)^2.$$

Notare che risulta sempre $\cos\theta < 0$ e, per la condizione di non-distacco $v < v^\star$, è anche $\cos\theta > -1$.

Sostituendo

$$\mu_{\mathrm{s,min}} = \frac{v^{\star 2}}{6}\,\frac{\sqrt{1-(v/v^\star)^4}}{v^{\star 2} - v^4/v^{\star 2}} = \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{1-(v/v^\star)^4}}{1-(v/v^\star)^4} = \frac{1}{6\,\sqrt{1-(v/v^\star)^4}}\,.$$

Espressioni equivalenti:

$$\mu_{\mathrm{s,min}} = \frac{gR}{\sqrt{36\,g^2R^2 - v^4}} = \frac{g}{6\,\sqrt{g^2 - \omega^4\,d^2}}\,.$$

PROBLEMA n. 2 – Evoluzioni termodinamiche

Quesito n. 1.

Quando il pistone raggiunge l'altezza h_1 si trova in una situazione di equilibrio, dunque la pressione dell'aria nel recipiente è uguale alla pressione esercitata dall'atmosfera e dal pistone

$$p_1 = p_0 + \frac{Mg}{A} = 1.0424\times 10^5\ \mathrm{Pa}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{1.04\times 10^5\ \mathrm{Pa}}$

Quesito n. 2.

Nell'ipotesi di trascurare la conducibilità termica delle pareti del recipiente e del pistone, la prima fase si svolge in maniera adiabatica.

Durante la compressione sull'aria nel recipiente agisce la pressione esterna più quella dovuta al pistone, ovvero p_1, per cui il lavoro fatto è

$$\mathcal{L} = -p_1\,\Delta V = p_1\,(V_0 - V_1).$$

In alternativa si ritrova lo stesso risultato in termini energetici.

Quando il pistone ha raggiunto l'altezza h_1 (il volume dell'aria interna è $V_1 = V_\mathrm{r} + Ah_1$), la sua energia potenziale E_p è variata di una quantità negativa

$$\Delta E_\mathrm{p} = Mg\,(h_1 - h_0) = \frac{Mg}{A}\,(V_1 - V_0) = \frac{Mg}{A}\,\Delta V$$

mentre l'atmosfera ha compiuto un lavoro $\mathcal{L}_\mathrm{a} = p_0\,\Delta V$. Questa energia meccanica va ad aumentare l'energia interna U

$$\Delta U = -\left(\frac{Mg}{A}\,\Delta V + p_0\,\Delta V\right) = -\left(\frac{Mg}{A} + p_0\right)\Delta V = p_1\,(V_0 - V_1)\,.$$

Per una trasformazione adiabatica si ha

$$\mathcal{L} = \Delta U = nC_V\Delta T$$

dove n è il numero di moli del gas, C_V il calore specifico molare a volume costante, che per un gas biatomico vale $C_V = 5/2\,R$ con R costante universale dei gas perfetti e ΔT è la variazione di temperatura. Si ha dunque

$$p_1\,(V_0 - V_1) = \frac{5}{2}nR\,(T_1 - T_0) = \frac{5}{2}\,(p_1V_1 - p_0V_0) \quad \Rightarrow \quad 7p_1V_1 = (5p_0 + 2p_1)V_0$$

avendo usato l'equazione dei gas perfetti, $nRT = pV$, per lo stato finale e quello iniziale.

Da qui si ottiene

$$V_1 = \frac{5p_0 + 2p_1}{7p_1}\,V_0 = 1.0778 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{V_1 - V_\mathrm{r}}{A} = \frac{(5p_0 + 2p_1)V_0 - 7p_1\,V_\mathrm{r}}{7p_1\,A} = 38.912\,\mathrm{cm}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{h_1 = 38.9\,\mathrm{cm}}$

Usando ancora l'equazione dei gas perfetti

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_0V_0}{T_0} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{p_1V_1}{p_0V_0}\,T_0 = \frac{5p_0 + 2p_1}{7p_0}\,T_0 = 275.27\,\mathrm{K}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{T_1 = 275\,\mathrm{K}}$

In termini delle sole grandezze date nel testo, cioè senza usare p_1, fatte le necessarie sostituzioni, un modo di esprimere i risultati è questo

$$V_1 = \frac{(7p_0A + 2Mg)\,(V_\mathrm{r} + Ah_0)}{7(p_0A + Mg)}\,, \qquad h_1 = \frac{7p_0A + 2Mg - 5MgV_\mathrm{r}/(Ah_0)}{7(p_0A + Mg)}\,h_0\,, \qquad T_1 = \left(1 + \frac{2Mg}{7p_0A}\right)T_0\,.$$

Quesito n. 3.

Avendo ipotizzato che gli scambi di calore con l'esterno siano trascurabili, ossia avvengano con tempi molto lunghi, si può assumere che la trasformazione termodinamica del sistema sia adiabatica oltre che quasi statica. Dunque vale

$$pV^\gamma = \text{costante}, \quad \text{per cui, differenziando si ha}$$

$$\mathrm{d}(pV^\gamma) = \mathrm{d}p\,V^\gamma + p\,\gamma\,V^{\gamma-1}\,\mathrm{d}V = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}p = -\gamma\,p\,\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

con $\gamma = 7/5$, trattandosi di un gas biatomico.

In alternativa, utilizzando la formula [A1] della tabella delle "Formule utili" e considerando le variazioni infinitesime $\mathrm{d}p$ e $\mathrm{d}V$

$$(p + \mathrm{d}p)(V + \mathrm{d}V)^\gamma = pV^\gamma\left(1 + \frac{\mathrm{d}p}{p}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{d}V}{V}\right)^\gamma \approx pV^\gamma\left(1 + \frac{\mathrm{d}p}{p}\right)\left(1 + \gamma\frac{\mathrm{d}V}{V}\right) = pV^\gamma\,.$$

Dividendo l'ultima uguaglianza per pV^γ

$$\left(1 + \frac{\mathrm{d}p}{p}\right)\left(1 + \gamma\frac{\mathrm{d}V}{V}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{\mathrm{d}p}{p} + \gamma\frac{\mathrm{d}V}{V} + \gamma\frac{\mathrm{d}p}{p}\frac{\mathrm{d}V}{V} = 1 \quad \text{da cui,}$$

trascurando i termini infinitesimi del secondo ordine, si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}p = -\gamma p\,\frac{\mathrm{d}V}{V}\,.$$

Indicando ora con x lo spostamento del pistone intorno alla posizione h_1 l'espressione trovata diventa

$$\mathrm{d}p = -\gamma\left(p_0 + \frac{Mg}{A}\right)\frac{A}{V_1}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}p = -\gamma\,\frac{p_0A + Mg}{V_1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Sul pistone agisce dunque una forza risultante $\mathrm{d}F = A\,\mathrm{d}p$ e quindi questa è l'equazione dell'oscillatore armonico cercata

$$\mathrm{d}F = -\kappa\,\mathrm{d}x \quad \text{con costante}^{(1)} \quad \kappa = \gamma\,\frac{(p_0A + Mg)A}{V_1}\,.$$

Il periodo è dunque

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{MV_1}{\gamma(p_0A + Mg)A}} = 661.32\,\mathrm{ms}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{\tau = 661\,\mathrm{ms}}$

---

(1) Attenzione a non confondere questo parametro κ (costante elastica) con la costante k di Boltzmann che sarà usata più avanti.

Quesito n. 4.

Alla fine delle oscillazioni il pistone si trova in equilibrio e dunque la pressione dell'aria nel recipiente è uguale alla pressione esercitata dall'atmosfera e dal pistone

$$p_2 = p_1 = p_0 + \frac{Mg}{A} = 1.0424 \times 10^5\,\mathrm{Pa}\,.$$

Dopo un tempo molto lungo la temperatura dell'aria nel recipiente si sarà portata in equilibrio con la temperatura dell'ambiente $T_2 = T_0 = 273\,\mathrm{K}$. RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{T_2 = 273\,\mathrm{K}}$

L'altezza h_2 si determina dall'equazione di stato dei gas perfetti applicata al nuovo stato di equilibrio

$$p_2(V_\mathrm{r} + Ah_2) = nRT_2 = nRT_0 = p_0\,V_0 = p_0(V_\mathrm{r} + Ah_0) \quad \text{da cui} \quad V_2 = (V_\mathrm{r} + Ah_2) = \frac{p_0}{p_2}\,V_0 \quad \text{e}$$

$$h_2 = \frac{p_0(V_\mathrm{r} + Ah_0) - p_2 V_\mathrm{r}}{p_2\,A} = \frac{p_0 A h_0 - MgV_\mathrm{r}/A}{p_0 A + Mg} = 34.478\,\mathrm{cm}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{h_2 = 34.5\,\mathrm{cm}}$

Il nuovo valore del periodo, sostituendo V_2 a V_1 nell'espressione trovata sopra, è

$$\tau' = \tau\sqrt{\frac{V_2}{V_1}} = 658.60\,\mathrm{ms}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{\tau_1 = 659\,\mathrm{ms}}$

Quesito n. 5.

Se il pistone si muove a velocità costante v vuol dire che la risultante delle forze applicate è nulla, dunque si ha ancora l'equilibrio delle pressioni

$$p_3 = p_1 = p_0 + \frac{Mg}{A} = 1.042 \times 10^5\,\mathrm{Pa}\,.$$

L'equazione di stato dei gas perfetti può essere scritta in termini del numero totale N di particelle presenti nel recipiente

$$pV = NkT$$

dove adesso k è la costante di Boltzmann. Poiché l'aria nel recipiente è in equilibrio termico con l'ambiente circostante e la pressione rimane costante, è la variazione del numero totale di particelle nel recipiente che dà origine alla variazione di volume occupato dal gas e quindi all'abbassamento del pistone

$$p_3\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}N\,kT_0$$

con $\mathrm{d}V = A\,\mathrm{d}h = Av\,\mathrm{d}t$ dove $\mathrm{d}t$ rappresenta un piccolo intervallo temporale. Notare che v risulta negativa quando il pistone si abbassa.

$$p_3 Av\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}N\,kT_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{p_3 Av}{kT_0}\,.$$

La quantità $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ può essere ricavata considerando la differenza tra le particelle che escono dal recipiente, $\mathrm{d}N_\mathrm{out}/\mathrm{d}t$, e quelle che vi entrano, $\mathrm{d}N_\mathrm{in}/\mathrm{d}t$. Tenuto conto che il moto del pistone è molto lento, le particelle che riescono ad attraversare l'intercapedine tra il cilindro e il pistone nel tempo $\mathrm{d}t$ sono quelle che si trovano in un volume di area A_i della sezione dell'intercapedine e altezza $\langle u\rangle\,\mathrm{d}t$. Si può dunque scrivere l'equazione di stato dei gas perfetti per le particelle che escono e che entrano. Rispettivamente

$$\frac{1}{2}\,p_3 A_\mathrm{i}\langle u\rangle\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}N_\mathrm{out} kT_0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\,p_0 A_\mathrm{i}\langle u\rangle\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}N_\mathrm{in} kT_0$$

dove si è tenuto conto del fatto che solo la metà delle particelle contenute nel volume si muovono nel verso voluto. Allora

$$\frac{\mathrm{d}N_\mathrm{out}}{\mathrm{d}t} = \frac{p_3 A_\mathrm{i}\langle u\rangle}{2\,kT_0} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}N_\mathrm{in}}{\mathrm{d}t} = \frac{p_0 A_\mathrm{i}\langle u\rangle}{2\,kT_0}\,.$$

Poiché

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N_\mathrm{in}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}N_\mathrm{out}}{\mathrm{d}t} \quad \text{si ricava} \quad \frac{p_3 Av}{kT_0} = \frac{p_0 A_\mathrm{i}\langle u\rangle}{2\,kT_0} - \frac{p_3 A_\mathrm{i}\langle u\rangle}{2\,kT_0}\,.$$

Da qui si ottiene

$$|v| = \left|\frac{p_0}{p_3} - 1\right| \frac{A_\mathrm{i}}{2A}\langle u\rangle = \left|\frac{p_0}{p_0 + Mg/A} - 1\right| \frac{A_\mathrm{i}}{2A}\sqrt{\frac{2\,RT_0}{\pi m}} = 0.31499\,\mathrm{mm\,s^{-1}}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{|v| = 0.315\,\mathrm{mm\,s^{-1}}}$

e nel periodo di una oscillazione del quesito 3 il pistone scende di una quantità

$$d = |v|\ \tau = 0.20832\,\mathrm{mm}\,.$$

RISPOSTA VALIDA $\Rightarrow$ $\boxed{d = 0.208\,\mathrm{mm}}$

PROBLEMA n. 3 – Conduttore con cavità

Quesito n. 1.

L'energia magnetica, in termini della corrente è data da

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,Li^2 \quad \text{con} \quad \Phi(\vec{B})_\mathrm{conc} = L\,i\,.$$

Detta V_g la d.d.p. ai capi del generatore di corrente, e tenuto conto che i è costante, durante la fase transitoria l'equazione del circuito è

$$V_\mathrm{g} + \mathcal{E}_\mathrm{I} = Ri \quad \text{con} \quad \mathcal{E}_\mathrm{I} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(Li)}{\mathrm{d}t} = -i\,\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\,.$$

Ne segue che il lavoro fatto dal generatore è

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} [Ri - \mathcal{E}_\mathrm{I}(t)]\ i\,\mathrm{d}t = Ri^2\,\Delta t + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\,i^2\,\mathrm{d}t = Ri^2\,\Delta t + i^2 \int_{L_0}^{L_1} \mathrm{d}L = Ri^2\,\Delta t + \Delta L\,i^2 = Ri^2\,\Delta t + 2\,\Delta E_\mathrm{m}$$

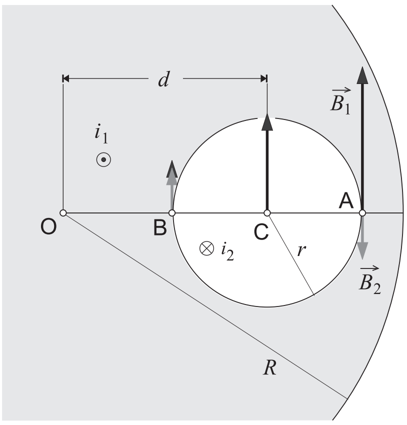
che in parte rappresenta l'effetto Joule ($Ri^2\,\Delta t$), in parte (ΔE_m) determina la variazione di energia magnetica mentre il resto (ancora ΔE_m) è quello necessario a far variare la geometria del sistema contro le forze esterne.

Quesito n. 2.

Applicando il principio di sovrapposizione, il campo magnetico $\vec{B}$ può essere determinato come composizione vettoriale di due campi magnetici, $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$: $\vec{B}_1$ è il campo prodotto da un cilindro pieno di raggio R percorso da una corrente elettrica, i_1, che circola dal basso verso l'alto nella figura del testo del problema; $\vec{B}_2$ è il campo prodotto da un cilindro pieno di raggio r percorso da una corrente elettrica, i_2 che circola in verso opposto all'altra.

All'interno di ciascuno dei due cilindri pieni, per simmetria le linee di campo magnetico sono circonferenze con il centro sull'asse del cilindro; per ciascuno di essi, a distanza r_i dal proprio asse, detta j la densità di corrente uniforme (positiva se è uscente), per il teorema di Ampère la componente tangenziale, positiva in verso antiorario, di $\vec{B}$ risulta

$$2\pi r_i\,B = \mu_0 \pi r_i^2\,j \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0\,j}{2}\,r_i \quad \text{con} \quad j = \frac{i}{\pi(R^2 - r^2)}\,.$$



Nei punti A, B e C i due campi sono perpendicolari alla congiungente dei punti O e C e orientati come in figura; si trova quindi [2]

$$B_\mathsf{A} = B_1(d+r) + B_2(r) = \frac{\mu_0\,j}{2}\,(d+r) - \frac{\mu_0\,j}{2}\,r = \frac{\mu_0\,j}{2}\,d = \frac{\mu_0\,i}{2\pi(R^2 - r^2)}\,d$$

$$B_\mathsf{B} = B_1(d-r) - B_2(r) = \frac{\mu_0\,j}{2}\,(d-r) + \frac{\mu_0\,j}{2}\,r = \frac{\mu_0\,j}{2}\,d = B_\mathsf{A}$$

$$B_\mathsf{C} = B_1(d) = \frac{\mu_0\,j}{2}\,d = B_\mathsf{A}\,.$$

Dunque il campo è uguale nei tre punti considerati.

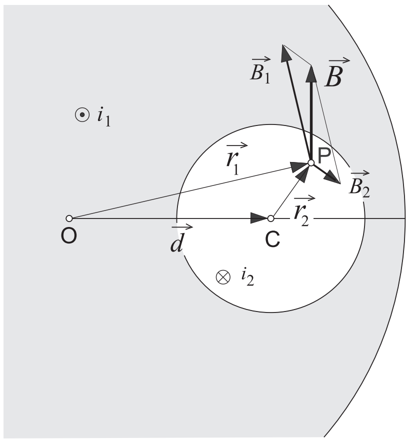
[2] Si faccia attenzione al fatto che B e j vanno intese come componenti dei rispettivi vettori, avendo assegnato i versi positivi come detto sopra. Se invece con B e j si indicassero i moduli dei due vettori allora la composizione si dovrebbe scrivere come

$$B_\mathsf{A} = B_1(d+r) - B_2(r) \quad \text{e} \quad B_\mathsf{B} = B_1(d-r) + B_2(r) \quad \text{ottenendo lo stesso risultato.}$$

Quesito n. 3.

Nei punti interni di un cilindro pieno il campo può essere espresso come vettore, in termini di $\vec{\jmath}$ e $\vec{r}_i$ come

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\,\mu_0\,\vec{\jmath}\times\vec{r}_i\,.$$



In un qualunque punto P della cavità, individuato dai vettori $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ rispetto ai rispettivi assi (v. figura), il campo è dato da

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2}\,\vec{\jmath}\times\vec{r}_1 + \frac{\mu_0}{2}\,(-\vec{\jmath})\times\vec{r}_2 = \frac{\mu_0}{2}\,\vec{\jmath}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2) =$$

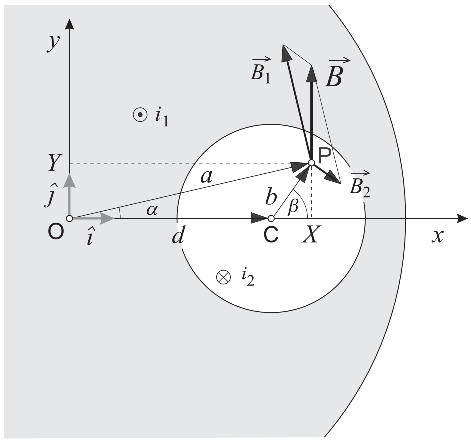
$$= \frac{\mu_0}{2}\,\vec{\jmath}\times\vec{d}\,.$$

Il campo non dipende quindi dal punto P ed è perciò uniforme in tutto il volume della cavità; il modulo di B è quello già trovato sopra.

Soluzioni alternative in termini delle componenti dei campi.

Con riferimento alla figura, il campo $\vec{B}$ si esprime in termini delle coordinate del punto $\mathsf{P}(X,Y)$ e dei versori $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ degli assi cartesiani, come

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\,j}{2}\,(-Y\,\hat{\imath} + X\,\hat{\jmath})\,.$$



All'interno della cavità il campo magnetico totale $\vec{B}$ vale

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0\,j}{2}\,(-Y\,\hat{\imath} + X\,\hat{\jmath}) + \frac{\mu_0\,j}{2}\,(Y\,\hat{\imath} - (X-d)\,\hat{\jmath}) =$$

$$= \frac{\mu_0\,j}{2}\,(-Y\,\hat{\imath} + X\,\hat{\jmath} + Y\,\hat{\imath} - X\,\hat{\jmath} + d\,\hat{\jmath}) =$$

$$= \frac{\mu_0\,j}{2}\,d\,\hat{\jmath} = \frac{\mu_0\,i}{2\pi\,(R^2-r^2)}\,d\,\hat{\jmath}\,.$$

In modo analogo, in termini di coordinate polari del punto P che sono (a,α) e (b,β) si può scrivere

$$B_x = \frac{\mu_0 j}{2}[a\,\mathrm{sen}\,\alpha - b\,\mathrm{sen}\,\beta] = 0$$

$$B_y = \frac{\mu_0 j}{2}[a\cos\alpha - b\cos\beta] = \frac{\mu_0 j}{2}\,d\,.$$

Quesito n. 4.

Per risolvere i quesiti seguenti si fa riferimento alla Fig. 3 del testo.

L'energia magnetica nella cavità è la somma dell'energia magnetica della parte del foro immersa nel liquido, che ha permeabilità magnetica relativa μ_r, e la parte soprastante vuota come prima. Essendo il liquido paramagnetico il campo magnetico all'interno della colonna di liquido è sempre costante e proporzionale al campo nel vuoto. Chiamando $\vec{B}$ il campo nel liquido e $\vec{B}_0$ il campo nel vuoto, si ha $\vec{B} = \mu_\mathrm{r}\,\vec{B}_0$.

L'energia magnetica nella cavità è

$$E_\mathrm{m}(h) = \frac{B^2}{2\mu}\pi\,r^2\left(\frac{\ell}{2}+h\right) + \frac{B_0^2}{2\mu_0}\pi\,r^2\left(\frac{\ell}{2}-h\right) = \frac{\mu_\mathrm{r}^2 B_0^2}{2\mu_0\mu_\mathrm{r}}\pi\,r^2\left(\frac{\ell}{2}+h\right) + \frac{B_0^2}{2\mu_0}\pi\,r^2\left(\frac{\ell}{2}-h\right) =$$

$$= \frac{B_0^2}{2\mu_0}\pi\,r^2\left[(\mu_\mathrm{r}+1)\frac{\ell}{2} + (\mu_\mathrm{r}-1)\,h\right]\,.$$

Quesito n. 5.

A seguito dell'innalzamento del livello del liquido nella cavità si è avuta una variazione di energia magnetica

$$\Delta E_\mathrm{m} = E_\mathrm{m}(h) - E_\mathrm{m}(0) = \frac{\mu_\mathrm{r}-1}{2\,\mu_0}\,B_0^2\,\pi\,r^2\,h\,.$$

Per quanto visto al quesito 1, il lavoro aggiuntivo fatto dal generatore è

$$\mathcal{L} = 2\,\Delta E_\mathrm{m} = \frac{\mu_\mathrm{r}-1}{\mu_0}\,B_0^2\,\pi\,r^2\,h\,.$$

Quesito n. 6.

Per determinare l'altezza h di risalita del liquido nella cavità, rispetto alla superficie libera del liquido, si può considerare il bilancio energetico tra lo stato iniziale e lo stato finale.

Indicando con ΔE la variazione di energia totale del sistema tra lo stato iniziale e quello finale, si ha

$$\Delta E = \Delta E_\mathrm{g} + \Delta E_\mathrm{m}$$

dove il simbolo ΔE_g indica la variazione di energia gravitazionale del liquido paramagnetico;

$$\Delta E_\mathrm{g} = mg\,\frac{h}{2} = \rho\,\pi r^2 h\, g\,\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\,\rho\, g\,\pi r^2\, h^2\,.$$

La variazione di energia corrisponde al lavoro fatto in più dal generatore per cui

$$\mathcal{L} = \Delta E \quad \Rightarrow \quad 2\,\Delta E_\mathrm{m} = \Delta E_\mathrm{g} + \Delta E_\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_\mathrm{m} - \Delta E_\mathrm{g} = 0$$

da cui si ricava l'equazione in h :

$$\frac{B_0^2}{2\mu_0}\pi\, r^2\,(\mu_\mathrm{r}-1)\; h - \frac{1}{2}\,\rho\, g\,\pi r^2\, h^2 = 0 \quad \text{ovvero} \quad \left[\frac{B_0^2}{\mu_0}\,(\mu_\mathrm{r}-1) - \rho\, g\, h\right]\, h = 0\,.$$

Una soluzione è $h = 0$, da scartare perché rappresenta la situazione iniziale. La seconda soluzione è quella cercata:

$$h = \frac{B_0^2\,(\mu_\mathrm{r}-1)}{\mu_0\,\rho\, g} = \left[\frac{\mu_0\, i\, d}{2\pi\,(R^2 - r^2)}\right]^2 \frac{\mu_\mathrm{r}-1}{\mu_0\,\rho\, g} = \frac{(\mu-\mu_0)\, i^2\, d^2}{4\pi^2\rho g\,(R^2-r^2)^2}\,.$$

Materiale per la Commissione di valutazione

PROBLEMA n. 1 – Puro rotolamento

Quesito n. 1.

Calcolo diretto.

Il centro di massa del sistema si trova sull'asse di simmetria (asse x). Fissando un sistema di coordinate come si vede nella figura, si ha che $y_{\mathsf{CdM}} = 0$.

$$x_{\mathsf{CdM}} = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m \quad \text{con} \quad \mathrm{d}m = \sigma\, y(x)\,\mathrm{d}x$$

dove l'integrale è esteso alla superficie delimitata dalle due circonferenze

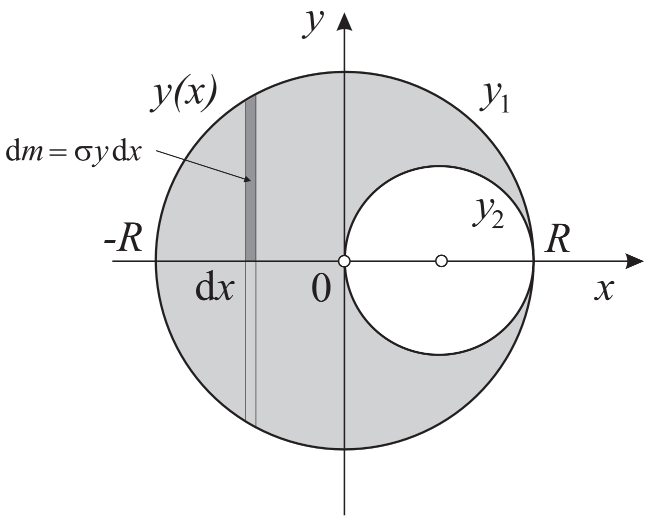
$$C_1 : x^2 + y^2 = R^2$$

$$C_2 : \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}\,.$$

Si esplicita y da entrambe le equazioni

$$y_1 = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y_2 = \pm\sqrt{\frac{R^2}{4} - \left(x - \frac{R}{2}\right)^2}\,.$$



Tenendo conto della simmetria del sistema

$$x_{\mathsf{CdM}} = 2\frac{\sigma}{M}\int_{-R}^{0} x\,y_1(x)\,\mathrm{d}x + 2\frac{\sigma}{M}\int_{0}^{R} x\,[y_1(x) - y_2(x)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\,\frac{\sigma}{M}\left[\int_{-R}^{0} x\,y_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{R} x\,y_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{R} x\,y_2(x)\,\mathrm{d}x\right] = 2\,\frac{\sigma}{M}\left[\int_{-R}^{R} x\,y_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{R} x\,y_2(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

L'integrale $\int_{-R}^{R} x\,y_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} x\,\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 0$ perché è l'integrale di una funzione dispari come si può facilmente verificare. Perciò resta da calcolare solo l'ultimo integrale

$$x_{\mathsf{CdM}} = -2\frac{\sigma}{M}\int_{0}^{R} x\,y_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

$$-\frac{M\,x_{\mathsf{CdM}}}{2\sigma} = \int_{0}^{R} x\sqrt{\frac{R^2}{4} - \left(x - \frac{R}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{R}\left[\left(x - \frac{R}{2}\right) + \frac{R}{2}\right]\sqrt{\frac{R^2}{4} - \left(x - \frac{R}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{0}^{R}\left(x - \frac{R}{2}\right)\sqrt{\frac{R^2}{4} - \left(x - \frac{R}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{R}{2}\int_{0}^{R}\sqrt{\frac{R^2}{4} - \left(x - \frac{R}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Il primo integrale dell'ultimo membro è nullo perché l'integranda è una funzione dispari rispetto al centro $x = R/2$. Il secondo integrale si calcola per sostituzione ponendo

$$x - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}\,\mathrm{sen}\,t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{R}{2}\,\cos t\,\mathrm{d}t\,.$$

Gli estremi di integrazione sono quello inferiore $-\pi/2$ e quello superiore $\pi/2$. Con questa sostituzione l'integrale diventa

$$\mathcal{I} = \frac{R}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\frac{R^2}{4}-\frac{R^2}{4}\,\mathrm{sen}^2\,t}\;\frac{R}{2}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{R^3}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\,t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{R^3}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\,.$$

Applicando le formule di bisezione all'integranda $\left(\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}\right)$ e calcolando la primitiva, si giunge a

$$\mathcal{I} = \frac{R^3}{8}\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{8}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi\,R^3}{16}\,.$$

In modo alternativo, ricordando la definizione di valor medio di una funzione

$$\langle\cos^2 t\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{I} = \frac{\pi\,R^3}{16}\,.$$

Si ha dunque

$$-\frac{M\,x_{\mathsf{CdM}}}{2\sigma} = \frac{\pi\,R^3}{16} \quad\Rightarrow\quad x_{\mathsf{CdM}} = -\frac{\pi\,R^3}{8}\cdot\frac{\sigma}{M}\,.$$

Il foro è un disco di densità σ, massa m e raggio $\dfrac{R}{2}$, asportato da un disco di raggio R e massa

$$M_0 = \pi R^2\sigma = \frac{4\pi R^2}{\pi R^2}m = 4m\,.$$

L'oggetto di cui si vuole il centro di massa ha una massa $M = M_0 - m = 3m$. Dunque l'ascissa del centro di massa è

$$x_{\mathsf{CdM}} = -\frac{\pi\,R^3}{8}\cdot\frac{4m}{\pi R^2}\cdot\frac{1}{3m} = -\frac{R}{6}\,.$$